CINEMATIQUE DU POINT

MRU - MRUA

Chapitre 4

EXERCICES

Feuille n°2

CORRECTION

*La résolution des exercices se fera de façon **rigoureuse**, **méthodique** et **précise** : pas de produit en croix, pas de « petits calculs intuitifs ». De la méthode, de la méthode, de la méthode…*

Exercice 1

Une voiture se déplace sur une route droite. La voiture est assimilée à un point et la route à un axe nommé $\vec{x}$.
La position de la voiture sur l'axe est repérée par son abscisse x qui varie au cours du temps noté t.
On donne $x(t) = 2 \cdot t - 3$.

a) Rechercher l'équation de la vitesse $v(t)$.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot t - 3) = 2$$

b) Rechercher l'équation de l'accélération $a(t)$.

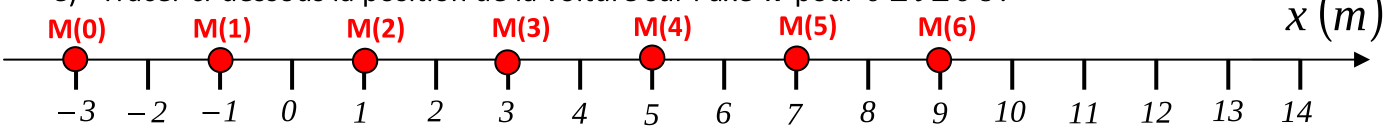
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0$$

c) En déduire le type de mouvement : ☑ MRU ☐ MRUA car : **vitesse constante**

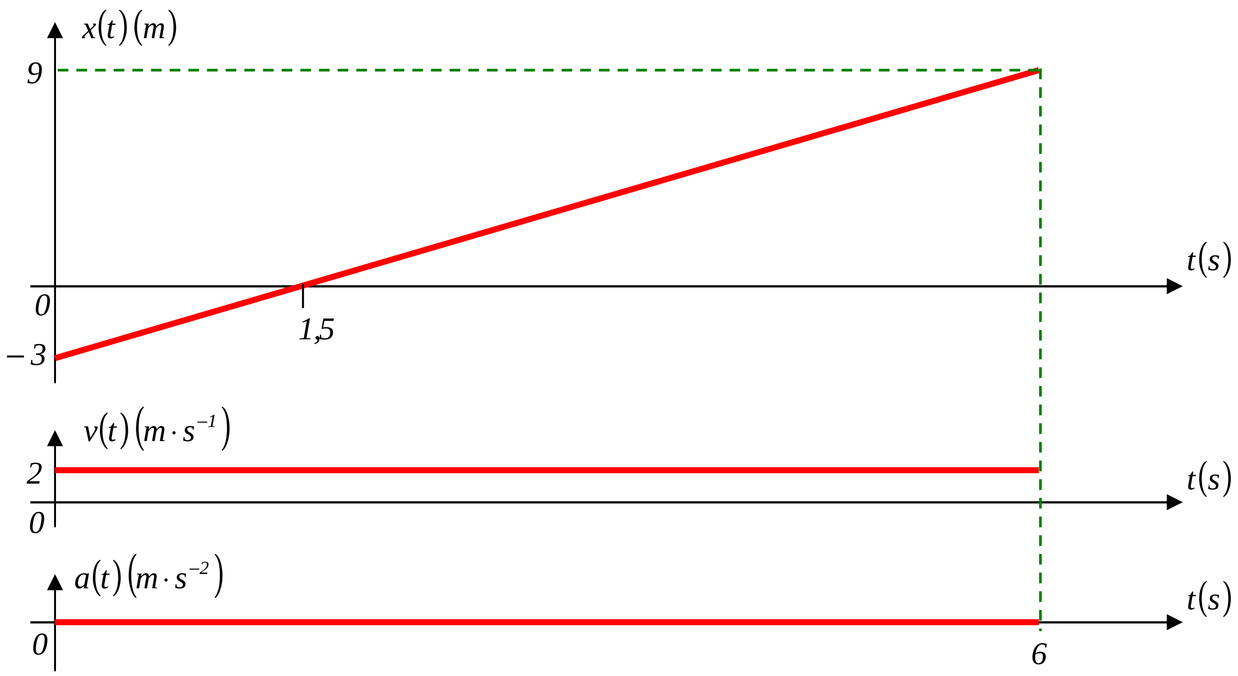
d) Compléter le tableau suivant :

$t\,(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$x(t)\,(m)$	**-3**	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
$v(t)\,(m \cdot s^{-1})$	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
$a(t)\,(m \cdot s^{-2})$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

e) Tracer ci-dessous la position de la voiture sur l'axe $\vec{x}$ pour $0 \leq t \leq 6\ s$.



f) Tracer les graphes des positions, vitesses et accélération pour $0 \leq t \leq 6\ s$.



Exercice 2

On donne pour la voiture de l'exercice précédent l'équation de la vitesse : $v(t) = -2 \cdot t + 1$. On précise qu'à $t = 3\ s$, la position de la voiture est $x(3) = 1\ m$ (condition particulière en position).

a) Rechercher l'équation de l'accélération $a(t)$.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-2 \cdot t + 1) = -2$$

b) Rechercher l'équation de la position $x(t)$.

$$x(t) = \int v(t) \cdot dt = \int (-2 \cdot t + 1) \cdot dt = -t^2 + t + x_0$$

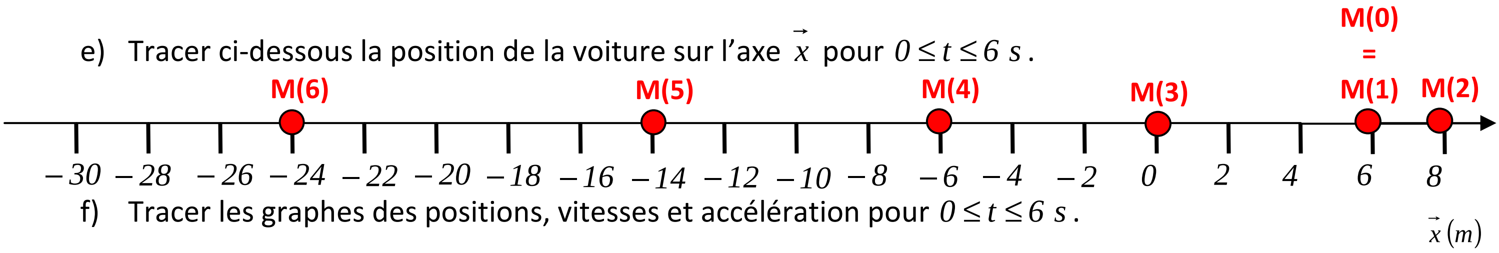
Condition particulière => $x(3) = 1\ m \quad \Rightarrow \quad 1 = -3^2 + 3 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 6\ m \quad \Rightarrow \quad x(t) = -t^2 + t + 6$

c) En déduire le type de mouvement : ☐ MRU ☑ MRUA car : **accélération constante**

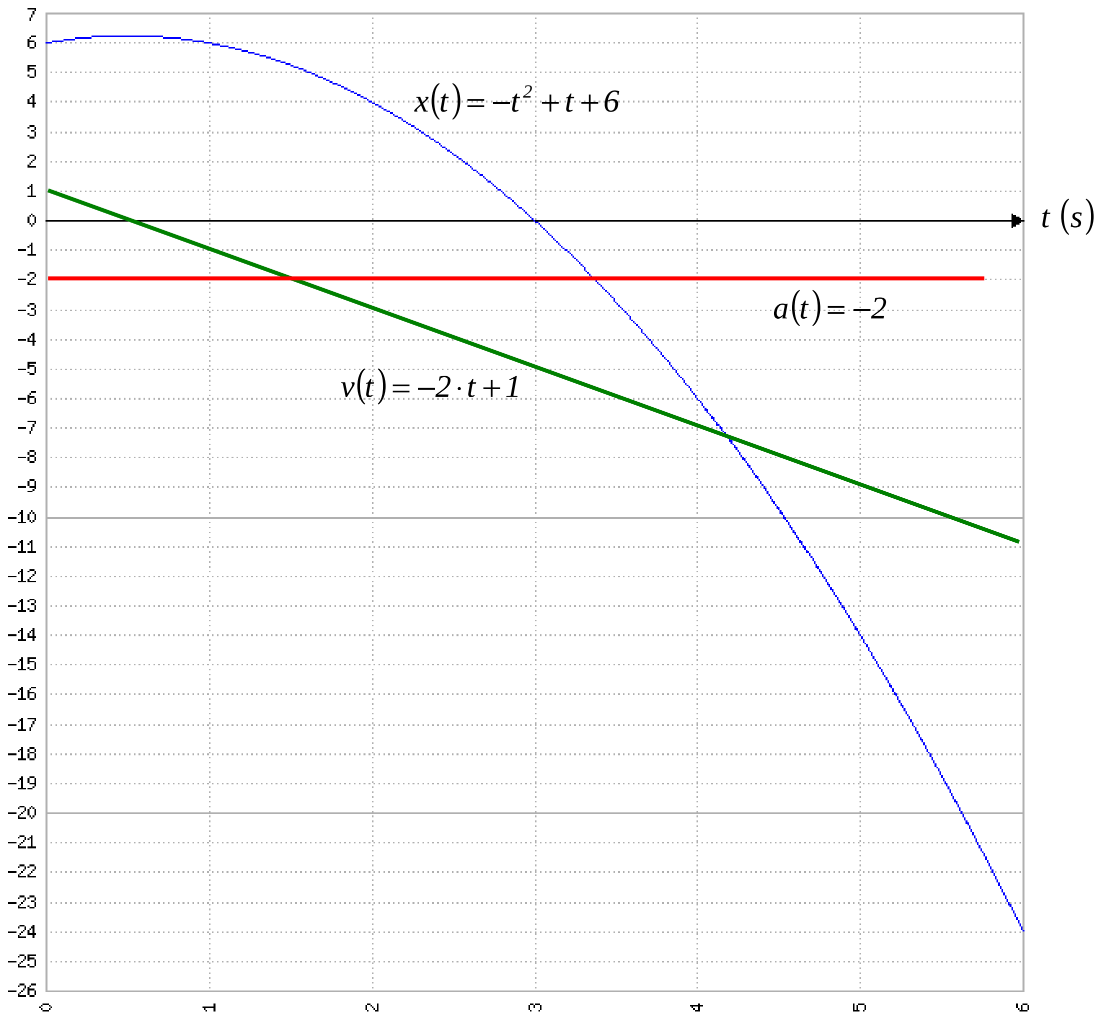
d) Compléter le tableau suivant :

$t\,(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$x(t)\,(m)$	**6**	**6**	**8**	**0**	**– 6**	**– 14**	**– 24**
$v(t)\,(m \cdot s^{-1})$	**1**	**– 1**	**– 3**	**– 5**	**– 7**	**– 9**	**– 11**
$a(t)\,(m \cdot s^{-2})$	**– 2**	**– 2**	**– 2**	**– 2**	**– 2**	**– 2**	**– 2**

e) Tracer ci-dessous la position de la voiture sur l'axe $\vec{x}$ pour $0 \leq t \leq 6\ s$.



f) Tracer les graphes des positions, vitesses et accélération pour $0 \leq t \leq 6\ s$.



Exercice 3

On donne pour la voiture de l'exercice précédent l'équation de l'accélération: $a(t)=3$. On donne les conditions particulières : $v(2)=0$ (condition en vitesse) et $x(4)=2\ m$ (condition en position).

Rechercher l'équation de la vitesse $v(t)$.

$$v(t)=\int a(t)\cdot dt=\int 3\cdot dt=3\cdot\int dt=3\cdot t+v_0$$

Condition particulière => $v(2)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=3\times 2+v_0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0=-6\ m\cdot s^{-1} \quad \Rightarrow \quad v(t)=3\cdot t-6$

a) Rechercher l'équation de la position $x(t)$.

$$x(t)=\int v(t)\cdot dt=\int (3\cdot t-6)\cdot dt=\frac{3}{2}t^2-6\cdot t+x_0$$

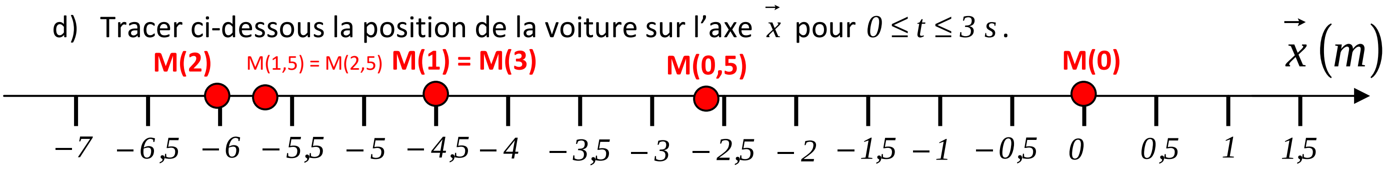
Condition particulière => $x(4)=2\ m \quad \Rightarrow \quad 2=\frac{3}{2}\times 4^2-6\times 4+x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=0 \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{3}{2}\cdot t^2-6\cdot t$

b) En déduire le type de mouvement : ☐ MRU ☑ MRUA car : **accélération constante**

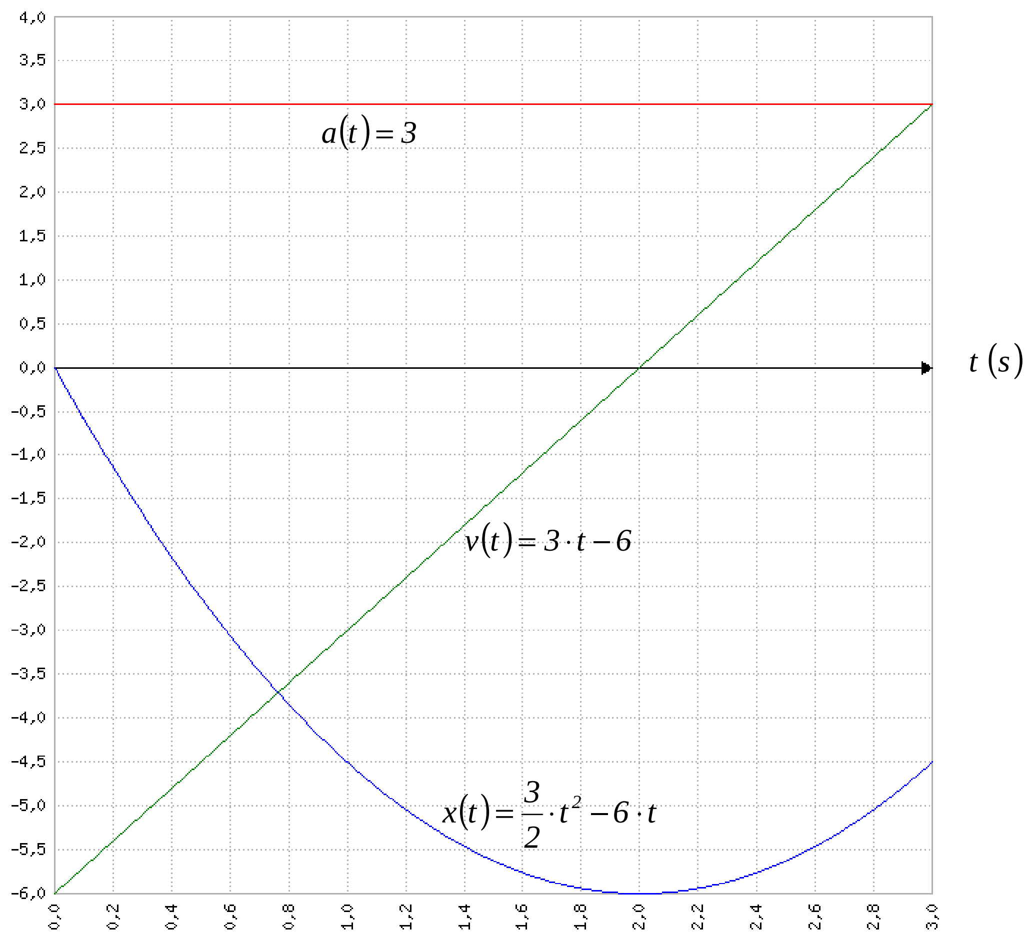
c) Compléter le tableau suivant :

$t\ (s)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$x(t)\ (m)$	**0**	**– 2,62**	**– 4,5**	**– 5,62**	**– 6**	**– 5,62**	**– 4,5**
$v(t)\ (m\cdot s^{-1})$	**– 6**	**– 4,5**	**– 3**	**– 1,5**	**0**	**1,5**	**3**
$a(t)\ (m\cdot s^{-2})$	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**

d) Tracer ci-dessous la position de la voiture sur l'axe $\vec{x}$ pour $0\le t\le 3\ s$.



e) Tracer les graphes des positions, vitesses et accélération pour $0\le t\le 3\ s$.



Exercice 4

Une voiture (1) se déplace sur l'axe $\vec{x}$ moyennant l'équation de vitesse $v_1(t) = 6 \cdot t - 2$.

Une voiture (2) se déplace sur ce même axe $\vec{x}$ moyennant l'équation de vitesse $v_2(t) = t + 5$.

On donne $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 10\ m$.

a) Rechercher l'équation de l'accélération $a_1(t)$.

$$a_1(t) = \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(6 \cdot t - 2) = 6$$

b) Rechercher l'équation de la vitesse $x_1(t)$.

$$x_1(t) = \int v_1(t) \cdot dt = \int (6 \cdot t - 2) \cdot dt = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + x_{10}$$

Condition particulière => $x_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t$

c) Rechercher l'équation de l'accélération $a_2(t)$.

$$a_2(t) = \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(3 \cdot (t + 12)) = 3$$

d) Rechercher l'équation de la vitesse $x_2(t)$.

$$x_2(t) = \int v_2(t) \cdot dt = \int (t + 5) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t^2 + 5 \cdot t + x_{20}$$

Condition particulière =>

$$x_2(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 10 = \frac{1}{2} \times 0^2 + 5 \times 0 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 + 5 \cdot t + 10$$

e) Rechercher les dates auxquelles les voitures se rencontrent pour $t \in [0;+\infty[$.

On demande finalement les valeurs de t pour lesquelles $x_1 = x_2$; allons-y…

$$x_1 = x_2$$

$$3 \cdot t^2 - 2 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot t^2 + 5 \cdot t + 10$$

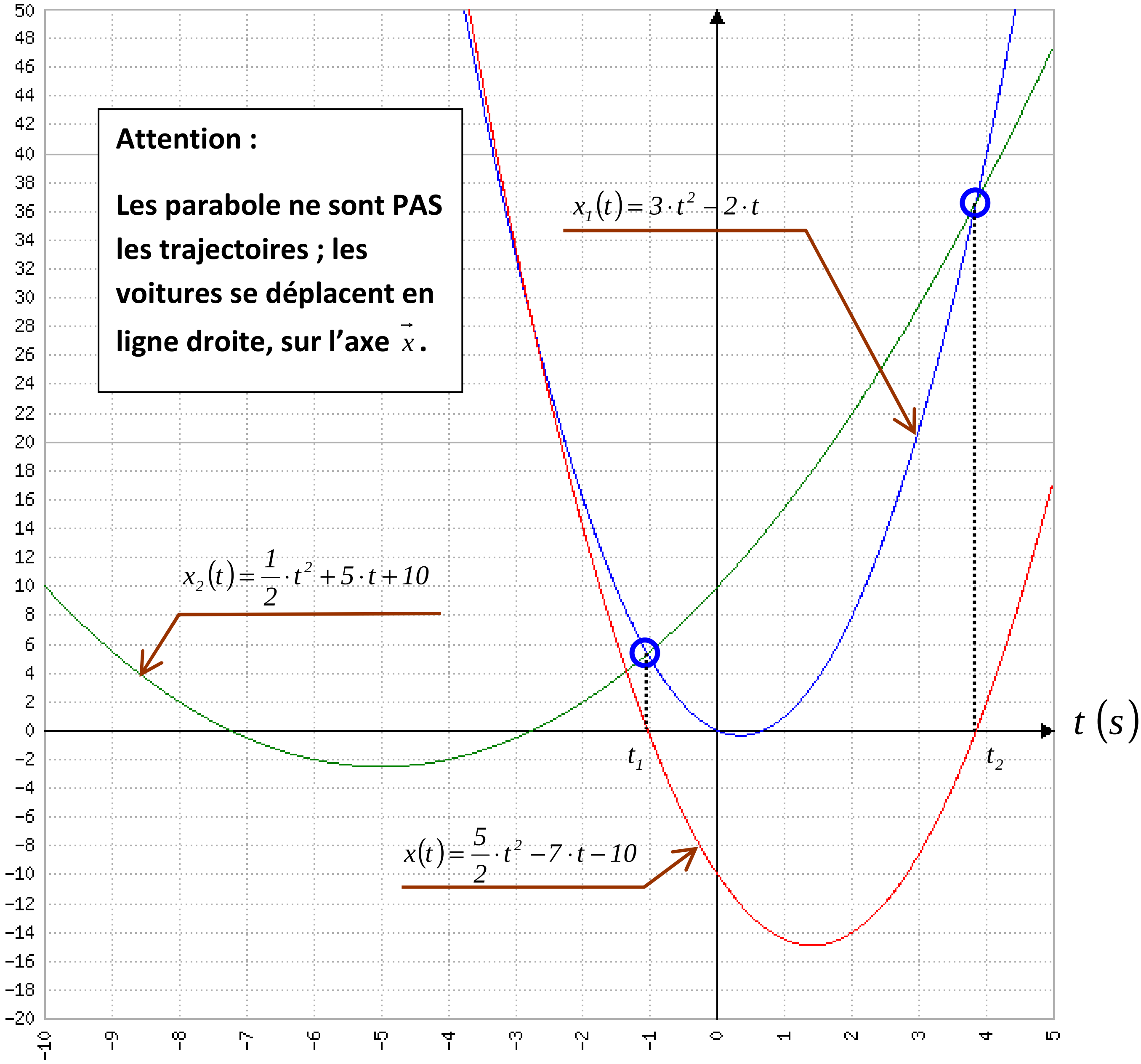
$$\frac{5}{2} \cdot t^2 - 7 \cdot t - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-7)^2 - 4 \times \frac{5}{2} \times (-10) = 149 > 0$$

$$t_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{149}}{2 \times \frac{5}{2}} = 3{,}83\ s$$

$$t_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{149}}{2 \times \frac{5}{2}} = -1{,}04\ s$$

<u>Discussion</u> : le temps négatif est <u>physiquement impossible</u> ; une seule solution est à retenir parmi les deux : $t_1 = 3{,}83\ s$



f) Rechercher l'ensemble des lieux auxquelles les voitures se rencontrent pour $t \in [0;+\infty[$.

Comme il n'y a qu'une seule date à laquelle les voitures se rencontrent, il n'y a donc qu'un seul lieu ; pour le trouver, deux façons : on calcule $x_1(t_1)$ ou $x_2(t_1)$; nous allons faire les deux…

$$x_1(t_1) = x_1(3{,}83) = 3\times 3{,}83^2 - 2\times 3{,}83 = 36{,}35\ m$$

$$x_2(t_1) = x_2(3{,}83) = \frac{1}{2}\times 3{,}83^2 + 5\times 3{,}83 + 10 = 36{,}48\ m$$

Le petit écart est du aux arrondis successifs.

Exercice 5 (pour aller plus loin…)

Un point se déplace selon une trajectoire définie par $x(t) = cos(\omega \cdot t + \varphi)$ avec $\omega = 2\ rad \cdot s^{-1}$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}\ rad$.

a) Rechercher l'équation de la vitesse $v(t)$.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(cos(\omega \cdot t + \varphi)) = -\omega \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

b) Rechercher l'équation de l'accélération $a(t)$.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)) = -\omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

c) Rechercher les dates t_i auxquelles la position $x(t_i)$ est nulle pour $t \in [0;+\infty[$.

$$x(t) = 0$$
$$cos(\omega \cdot t + \varphi) = 0$$
$$cos(\omega \cdot t + \varphi) = cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$
$$\omega \cdot t + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$t = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \varphi\right)$$
$$t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$
$$t = \frac{\pi}{6} \cdot (2 + 3 \cdot k)$$

Avec $k = 0,1,2,3,....$

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$t\ (s)$	**1,047**	**2,618**	**4,189**	**5,760**	**7,330**	**8,901**